一般位相と解析学　講義報告　第 8 回 *

数学工房 †

2008 年 10 月 12 日 14:00-16:30

概要

　前回，連結性を説明したが．ここで使われる「開集合かつ閉集合」という概念や「局所定数関数が定数関数」になるという部分に質問が多く出たため，これを考察する練習問題を最初に研究した．次に連結性に関する基本的な命題，特に部分集合の相対位相での連結性を，元の集合の位相で示すための関係式を与えた．この関係によって部分集合の連結性を相対位相と元の集合の位相の両方でとらえることができるようになる．

1　連結性の復習

　連結性の定義に使われる条件，特に，開集合でかつ閉集合であるという概念，局所定数関数が定数関数と一致するという概念に対して多くの質問が出た．そこで今回は連結性を復習するための演習から開始した．

演習 1.1. $(\mathbb{R},\ d)$ を数直線上の *Euclid* 空間とする．*Euclid* 位相（開集合系）を $\mathcal{E}$ とする．位相は距離

$$d(x,\ y) := |x-y|$$

で与えられている．ここで集合 X を次のように定義する．

$$X = (-\infty,\ \alpha) \cup (\alpha,\ \beta) \cup (\beta,\ \infty),\ (\alpha < \beta)$$

この X に（相対位相で）距離を導入した位相空間 $(X,\ d)$ の性質について次のことを示せ．

1° X は非連結である．正確には *Euclid* 相対位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}_{\mathcal{E}}(X))$ として非連結である．これを連結性に関する同値な *3* つの条件を使って示せ．

---

* Reported by H.T.

† http://www.sugakukobo.com

2° $\mathcal{LC}(X)$ を完全に定義せよ．

3° 開かつ閉集合をすべてあげよ．

4° 開区間は連結であることを示せ．

Proof. 演習 1.1

1° (a) 局所定数関数を使う．$x \in X$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in (-\infty,\ \alpha) \\ 0 & x \in (\alpha,\ \beta) \\ -1 & x \in (\beta,\ \infty) \end{cases}$$

とすると，$f(x)$ は局所定数関数 $\mathcal{LC}(X)$ である．しかしこれは X で定数関数にはなっていない．よって非連結である．

（注意）．局所定数になることを証明するには，任意の点に対して近傍を取ることができて，そこでは $f(x)$ が定数となっていることを示せばよい．

(b) $\mathcal{E}$ は $\mathbb{R}$ 上の Euclid 位相である．X 上の Euclid 相対位相の定義は

$$\mathfrak{O}_{\mathcal{E}}(X) := \{U \cap X\ ;\ U \in \mathcal{E}\}$$

である．$\mathcal{E}$ の開集合 $(-\infty,\ \alpha),\ (\alpha,\ \beta),\ (\beta,\ \infty)$ は $\mathfrak{O}_{\mathcal{E}}(X)$ の開集合である．

（注意）．X 上に相対位相の開集合系を作るには上記の定義に従って，$\mathbb{R}$ の $\mathcal{E}$ 開集合との共通部分をとる．すると上記の 3 つの開区間がそのまま相対位相の開集合系に入ることに注意せよ．

開集合の性質から $(-\infty,\ \alpha) \cup (\alpha,\ \beta) \in \mathfrak{O}_{\mathcal{E}}(X)$ である．よって $(\beta,\ \infty) = X \setminus (-\infty,\ \alpha) \cup (\alpha,\ \beta) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{E}}(X)$ となる．すなわち，$(\beta,\ \infty)$ は開かつ閉集合である．X でなく $\emptyset$ でもない開かつ閉集合が存在するので非連結である．

(c)

$$\begin{aligned} O_1 &= (-\infty,\ \alpha) \cup (\alpha,\ \beta) \\ O_2 &= (\beta,\ \infty) \end{aligned}$$

とすると $O_1,\ O_2 \in \mathfrak{O}_{\mathcal{E}}(X)$ で $O_1 \cup O_2 = X,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$ である．また $O_1 \neq \emptyset,\ O_2 \neq \emptyset$ なので，非連結である．

2° 区間が連結であることは認めておく．

$$\begin{aligned} \mathcal{LC}(X) &= \left\{\lambda_1 1_{(-\infty,\ \alpha)} + \lambda_2 1_{(\alpha,\ \beta)} + \lambda_3 1_{(\beta,\ \infty)}\right\} \\ &= \mathbb{R}1_{(-\infty,\ \alpha)} \oplus \mathbb{R}1_{(\alpha,\ \beta)} \oplus \mathbb{R}1_{(\beta,\ \infty)} \end{aligned}$$

すなわち 3 次元線型空間である．なお $f' = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathcal{LC}(X)$ という関係がある．

3° 宿題とする．先に $(\beta,\ \infty)$ が開かつ閉集合であることは示している．同様に示せばよい．

4° 開区間 $I=(\alpha,\ \beta)$ の連結性を示す．ここでは任意の局所定数関数が区間で定数関数になることを示す．任意の局所定数関数であることが大切である．

(注意)．一般に $\mathbb{R}1_X \triangleright \mathcal{LC}(X)$ であるが，区間が連結だと $\mathbb{R}1_X = \mathcal{LC}(X)$ である．

$x_0 \in I$ を固定する．

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (f(x) = f(x_0)) \\ -1 & (f(x) \neq f(x_0)) \end{cases}$$

とおくと，これは局所定数関数である．なぜなら

(a) $x_1 \in I$ で $g(x_1)=1$ であれば $f(x_1)=f(x_0)$ である．f は局所定数関数だから位相空間 X の近傍（$\mathbb{R}$ の近傍ではないことに注意）$V \in \mathfrak{V}(x_1)$ が存在して

$$f(x) = f(x_1) = f(x_0) \text{ for } \forall x \in V$$

となる．よって

$$g(x) = 1 \text{ for } \forall x \in V$$

である．

(b) $x_1 \in I$ で $g(x_1)=-1$ なら $f(x_0) \neq f(x_1)$ である．f は局所定数関数だから，位相空間 X の近傍 $V \in \mathfrak{V}(x_1)$ が存在して

$$f(x) = f(x_1) \neq f(x_0) \text{ for } \forall x \in V$$

となる．

$$g(x) = -1 \text{ for } \forall x \in V$$

である．

これから $g(x) \in \mathcal{LC}(I) \subset C(I)$ である．g は連続関数なので $f(x_0) \neq f(x_1)$ である1点 x_1 があれば（$x_0 < x_1$ と仮定しても一般性を失わない）$\xi \in (x_0,\ x_1)$ が存在して $g(\xi)=0$ となる．これは g の定義と矛盾である．よってこのような点はなく $g(x) \equiv 1$ となる．すなわち $f(x) = f(x_0)$ for $\forall x \in I$ となり定数関数となる．

(注意)．微積分の基本定理を使った別解を示す．この定理より $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ で $f'=0$ ならば $f=$ const in I である．$f \in \mathcal{LC}(X)$ とする．f は $x_0 \in I$ で微分可能かつ $f'(x)=0$ である．よって f は I で定数となる．これは I の連結性を示してる．

□

2　連結性についての基本命題

　まず部分集合の連結に関する基本性質を研究しよう．

命題 2.1. $X \neq \emptyset,\ x_0 \in X,\ \{x_0\}$ は連結である．

命題 2.2. 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$ が与えられている．X が連結であるとは，X の任意の部分集合 Y について $\partial Y \neq \emptyset$ を満たすことである．ただし $Y \neq \emptyset,\ Y \neq X$ である．また境界 ∂Y は X の位相 $\mathfrak{O}(X)$ で考えたものである．

(注意)．相対位相にすると境界が消滅するので意味がなくなってしまう．

　部分空間の連結性を元の空間の位相でとらえることができると便利でなことがある．そこで，以下ではこれらの関係を明らかにする．まず部分空間が連結であることをの定義を与える．

定義 2.1 (部分空間の連結)**.** $(X,\ \mathfrak{O}(X))$ を位相空間とする．部分空間 $Y \subset X$ が連結であるとは $(Y,\ \mathfrak{O}_X(Y))$ が連結であることをいう．

命題 2.3 (部分集合の連結性ともとの集合の位相)**.** 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$ の部分集合 Y について次は同値である．

1° Y は連結である．

2° $O_1,\ O_2 \in \mathfrak{O}(X)$ が

$$Y \subset O_1 \cup O_2 \text{ かつ } Y \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

を満たすならば

$$O_1 \cap Y = Y \text{ または } O_2 \cap Y = Y$$

である．

命題 2.4. $Y(\subset M)$ が連結とする．このとき $Y \subset M \subset Y^-$ を満たす任意の部分集合 M は連結である．

命題 2.5. $(Y_\lambda)_{\lambda \in \mathit{\Lambda}}$ を位相空間 X の連結な部分集合の族とする．ただし $Y_\lambda \cap Y_\mu \neq \emptyset,\ (\lambda,\ \mu \in \mathit{\Lambda})$ である．このとき $\bigcup_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} Y_\lambda$ は連結である．